

TEORETIČNA OBRAVNAVA TESLINEGA TRANSFORMATORJA

Mislav TRBUŠIĆ, Jože PIHLER

POVZETEK

V tem delu predstavljamo izračun Teslinega transformatorja, izdelanega za potrebe Laboratorija za energetiko na Fakulteti za elektrotehniko računalništvo in informatiko Univerze v Mariboru. Matematični model za izračun napetosti in tokov Teslinega transformatorja je podan z diferencialnimi enačbami, ki jih rešujemo z iskanjem lastnih vrednosti in pripadajočih lastnih vektorjev v programu Matlab. Induktivnosti in dozemna kapacitivnost VN navitja so izračunane iz energije magnetnega oziroma elektrostatičnega polja s pomočjo računalniškega programa FEMM 4.2. Postopek izračuna opisan v tem delu predstavlja osnovo za snovanje Teslinega transformatorja.

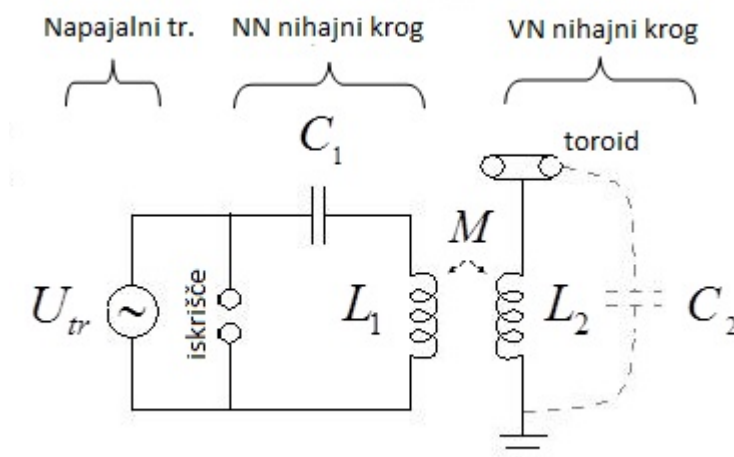
ABSTRACT

Paper presents a calculation of the Tesla transformer, which was built in Powerlab at the Faculty of Electrical Engineering and Computer Science at the University of Maribor. The mathematical model is defined using differential equations and is solved by finding the eigenvalues and the corresponding eigenvectors in Matlab. Inductances and ground capacitance of the HV winding are obtained from the magnetostatic and electrostatic energies, respectively, and calculated using FEMM 4.2. The calculation method described represents the basis for the construction of the Tesla transformer.

1. UVOD

Teslin transformator (TT) je posebna izvedba transformatorja brez magnetnega jedra, kjer primarna in sekundarna stran predstavljata nihajna kroga. Kadar sta ta dva nihajna kroga v bližini resonance lahko proizvajamo zelo visoke napetosti visokih frekvenc. TT v osnovi sestavljajo štirje sklopi (slika 1) :

- Napajalni transformator
- Iskrišče
- NN nihajni krog (primarni nihajni krog)
- VN nihajni krog (sekundarni nihajni krog)



Slika 1: Prikaz osnovnih sklopov Teslinega transformatorja.

TT smo izdelali za potrebe pedagoškega procesa, z namenom osvetlitve osnovnih elektromagnetnih pojavov kot so razelektritev, prisotnost elektromagnetnega polja v prostoru, kožni in resonančni pojav. Pri tem smo težili k najbolj preprosti in praktični izvedbi. Zaradi prostorskih omejitev smo se omejili na izvedbo primerno za laboratorij in ga po velikosti lahko uvrstimo v manjše TT.

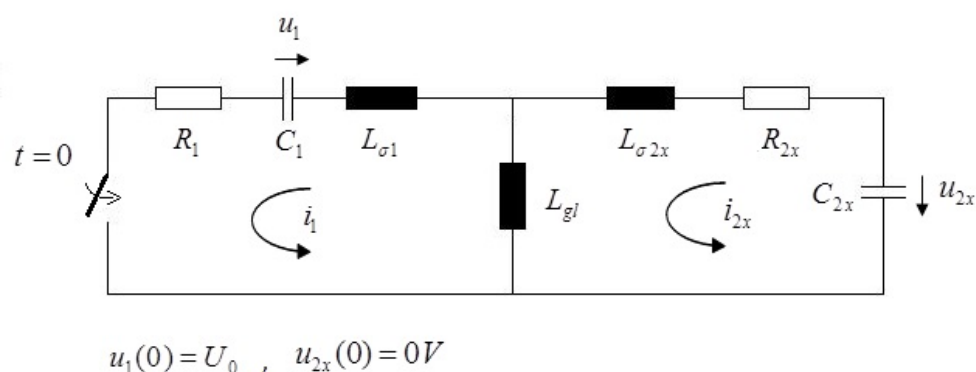
2. PRINCIP DELOVANJA IN MATEMATIČNI MODEL

Delovanje Teslinega transformatorja lahko opišemo s pomočjo slike 1. Napajalni transformator napaja NN (primarni) kondenzator C_1 . Ko napetost na kondenzatorju doseže prebojno napetost iskrišča, se preko električnega obloka sklene nihajni krog C_1 - L_1 , ki zaniha z resonančno frekvenco. Ker pa sta NN (primarni) in VN (sekundarni) nihajni krog magnetno povezana preko medsebojne induktivnosti M , zaniha z enako frekvenco tudi VN nihajni krog, ki ga tvorita VN tuljava in njena dozema kapacitivnost C_2 .

Matematično lahko TT predstavimo z ozirom na sliko 2 s homogenim sistemom diferencialnih enačb drugega reda (1), (2). Predpostavimo, da ob trenutku $t=0$ pride do preboja na iskrišču. Vse sekundarne veličine smo preračunali na primarno stran TT, pri tem smo z x označili, da gre za preračunane veličine.

$$i_1' R_1 + i_1'' L_{\sigma 1} + i_1'' L_{gl} - i_{2x}'' L_{gl} - \frac{i_1}{C_1} = 0 \quad (1)$$

$$i_{2x}' R_{2x} + i_{2x}'' L_{\sigma 2x} + i_{2x}'' L_{gl} - i_1'' L_{gl} - \frac{i_{2x}}{C_{2x}} = 0.$$



Slika 2: Predstavitev nadomestnega vezja TT ob trenutku preboja na iskrišču.

$$q = \frac{N_1}{N_2} \quad i_{2x} = \frac{i_2}{q} \quad R_{2x} = R_2 q^2 \quad C_{2x} = \frac{C_2}{q^2} \quad L_{\sigma 2x} = L_{\sigma 2} q^2 \quad u_{2x} = u_2 q$$

Ali v matričnem zapisu

$$[i''] + [L]^{-1}[R] \cdot [i'] + [L]^{-1}[C] \cdot [i] = [0] \quad (2)$$

Kjer so matrike induktivnosti, upornosti in kapacitivnosti podane:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{\sigma 1} + L_{gl} & -L_{gl} \\ -L_{gl} & L_{\sigma 2x} + L_{gl} \end{bmatrix} \quad [R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_{2x} \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_{2x}} \end{bmatrix}$$

$L_{\sigma 1}$	stresana induktivnost NN tuljave	[H]
$L_{\sigma 2}$	stresana induktivnost VN tuljave	[H]
$L_{\sigma 2x}$	stresana induktivnost VN tuljave preračunana na NN stran	[H]
L_{gl}	glavna induktivnost med NN in VN tuljavo	[H]
R_1	ohmska upornost NN tuljave	[Ω]
R_2	ohmska upornost VN tuljave	[Ω]
R_{2x}	ohmska upornost VN tuljave preračunana na NN stran	[Ω]
C_1	kapacitivnost NN nihajnega kroga	[F]
C_2	kapacitivnost VN nihajnega kroga	[F]
C_{2x}	kapacitivnost VN nihajnega kroga preračunana na NN stran	[F]
i_1	tok na NN strani TT	[A]

i_2	tok na VN strani TT	[A]
i_{2x}	tok na VN strani TT, preračunan na NN stran	[A]
u_1	napetost na kondenzatorju C_1	[V]
u_2	napetost na toroidu VN tuljave	[V]
u_{2x}	napetost na toroidu VN tuljave, preračunana na NN stran	[V]
N_1	število ovojev NN tuljave	
N_2	število ovojev VN tuljave	
q	razmerje ovojev med NN in VN tuljavo	

Sistem diferencialnih enačb (2) lahko z nastavkom $[i]=[D]e^{\lambda t}$ prevedemo v sistem algebrskih enačb (3) [1].

$$\{\lambda^2 + [\lambda][L]^{-1}[R] + [L]^{-1}[C]\} \cdot [i] = [0] \rightarrow [A_\lambda] \cdot [i] = [0] \quad (3)$$

$$[\lambda^2] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ničle karakterističnega polinoma $\det([A_\lambda])=0$ so lastne vrednosti (4), pripadajoči lastni vektorji pa so netrivialne rešitve sistema (2). V našem primeru so lastne vrednosti kompleksno konjugirani pari in predstavljajo dušeno nihanje, lastni vektorji pa amplitudne vektorje. Rešitev sistema (2) nam da tokove na NN in VN strani TT (5) [1] [2].

$$\lambda_1 = \delta_1 + j\omega_1 \quad \lambda_2 = \delta_2 + j\omega_2 \quad \lambda_3 = \lambda_1^* = \delta_1 - j\omega_1 \quad \lambda_4 = \lambda_2^* = \delta_2 - j\omega_2 \quad (4)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	lastne vrednosti matrike A_λ	
ω_1, ω_2	lastni krožni frekvenci sistema (2)	[s ⁻¹]
δ_1, δ_2	lastni konstanti dušenja sistema (2)	[s ⁻¹]

$$i_1 = k_1 a_{11} e^{\delta_1 t} \sin(\omega_1 t) + k_2 a_{12} e^{\delta_2 t} \sin(\omega_2 t)$$

$$i_{2x} = k_1 a_{21} e^{\delta_1 t} \sin(\omega_1 t) + k_2 a_{22} e^{\delta_2 t} \sin(\omega_2 t)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_{2x} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} e^{\delta_1 t} \sin(\omega_1 t) + k_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} e^{\delta_2 t} \sin(\omega_2 t), \quad (5)$$

kjer $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ predstavljata lastna vektorja k_1, k_2 pa poljubni konstanti.

Napetost na kondenzatorju C_1 (6) in toroidu TT (7) lahko izračunamo z izrazoma

$$u_1 = -\frac{1}{C_1} \int i_1 dt \quad (6)$$

$$u_{2x} = -\frac{1}{C_{2x}} \int i_{2x} dt \quad (7)$$

Po uvrstitvi i_1 in i_{2x} v (6) in (7), ter integraciji, dobimo izraz za napetosti (8).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{C_{2x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{\delta_1 t}}{\delta_1^2 + \omega_1^2} (\delta_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_1 \cos(\omega_1 t)) \\ \frac{e^{\delta_2 t}}{\delta_2^2 + \omega_2^2} (\delta_2 \sin(\omega_2 t) - \omega_2 \cos(\omega_2 t)) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ob upoštevanju začetnih pogojev (9) (slika 2), lahko določimo konstanti k_1 in k_2 (10).

$$u_1(0) = U_0 \quad u_{2x}(0) = 0 \quad (9)$$

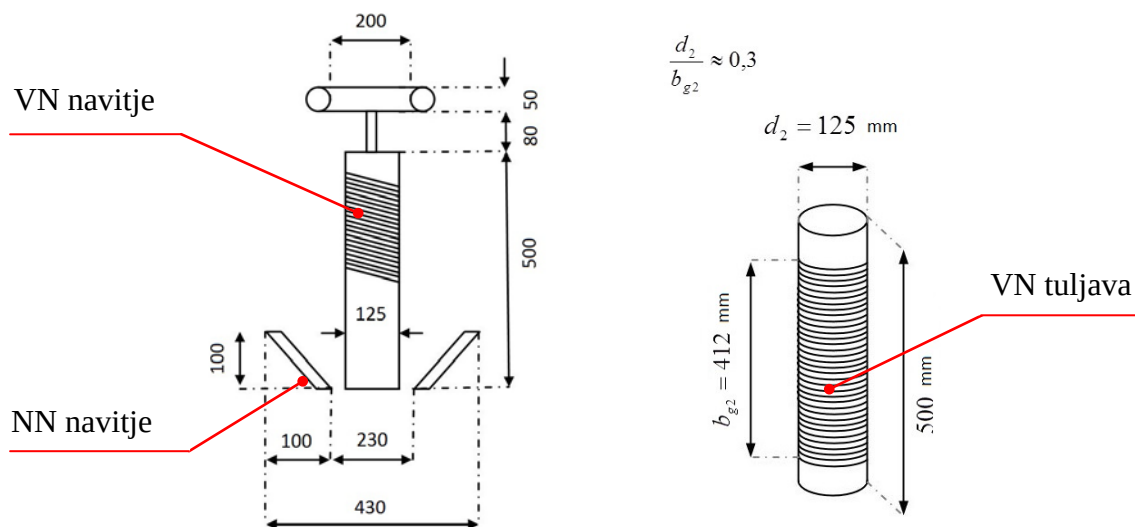
$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{2x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{\delta_1 t} \omega_1}{\delta_1^2 + \omega_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{e^{\delta_2 t} \omega_2}{\delta_2^2 + \omega_2^2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Z določitvijo k_1 in k_2 , so določene amplitudne vrednosti napetosti v izrazu (8).

3. IZRAČUN PARAMETROV TESLINEGA TRANSFORMATORJA

3.1 Izračun kapacitivnosti in induktivnosti

Načrtovanja Teslinega transformatorja smo se lotili obratno, kot je to običajno pri transformatorjih. Najprej smo določili konstrukcijski (geometrijo) in šele nato električni del (število obojev). Geometrijske izmere smo določili na osnovi dosegljivih sestavnih delov. Geometrijo TT prikazuje slika 3. Vse dimenzije so v mm.



Slika 3: Geometrija Teslinega transformatorja.

Po izbranih dimenzijah sestavnih delov, smo se lotili izračunov električnih parametrov. Izvedba NN navitja v oblik Arhimedove spirale je bila kompromisna rešitev za doseganje čim boljšega faktorja elektromagnetne povezave k , z ozirom na dielektrično razdaljo do VN navitja. Parameter ki smo ga prosto izbrali, je razmerje med širino d_2 in višino b_{g2} VN navitja. Po priporočilih izdelovalcev TT je ta med $0,2 \sim 0,4$, mi smo izbrali $0,3$ [4]. Vrednost kondenzatorja C_1 je treba določiti odvisno od izbire napajalnega transformatorja. V našem primeru smo za vrednost primarnega kondenzatorja C_1 izbrali $9,9 \text{ nF}$.

Iz znane geometrije smo s pomočjo programa FEMM 4.2 izračunali prevodnosti magnetnih poti Λ_1 , Λ_2 , Λ_{12} in dozemno kapacitivnost VN navitja C_2 (slika 4) [5]. Lastni in medsebojno induktivnost NN in VN tuljave smo določili prek energije magnetnega polja. Ob predpostavki, da imata oba navitja en ovoj, dobimo izraz za magnetno prevodnost (11) [6].

$$\Lambda = \frac{2W_{mag}}{I^2} \quad (I=1 \text{ A}) \quad (11)$$

Lastni induktivnosti obeh navitij lahko izračunamo iz enačb (12), (13).

$$L_1 = \Lambda_1 N_1^2 \quad (12)$$

$$L_2 = \Lambda_2 N_2^2 \quad (13)$$

Medsebojno induktivnost M med NN in VN navitjem (14) in faktor elektromagnetne povezave k (16), sta določljiva kot sledi v nadaljevanju.

$$M = \Lambda_m N_1 N_2 \quad (14)$$

Kjer je magnetna prevodnost med NN in VN navitjem

$$\Lambda_m = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_{12}}{2} \quad (15)$$

$$k = \frac{\Lambda_m}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \quad (16)$$

Sedaj lahko zapišemo še izraze za glavno in stresani induktivnosti, ki se pojavijo v nadomestnem vezju na sliki 2.

$$L_{gl1} = M \frac{N_1}{N_2} = L_{gl} \quad (17)$$

$$L_{gl2} = M \frac{N_2}{N_1} \quad (18)$$

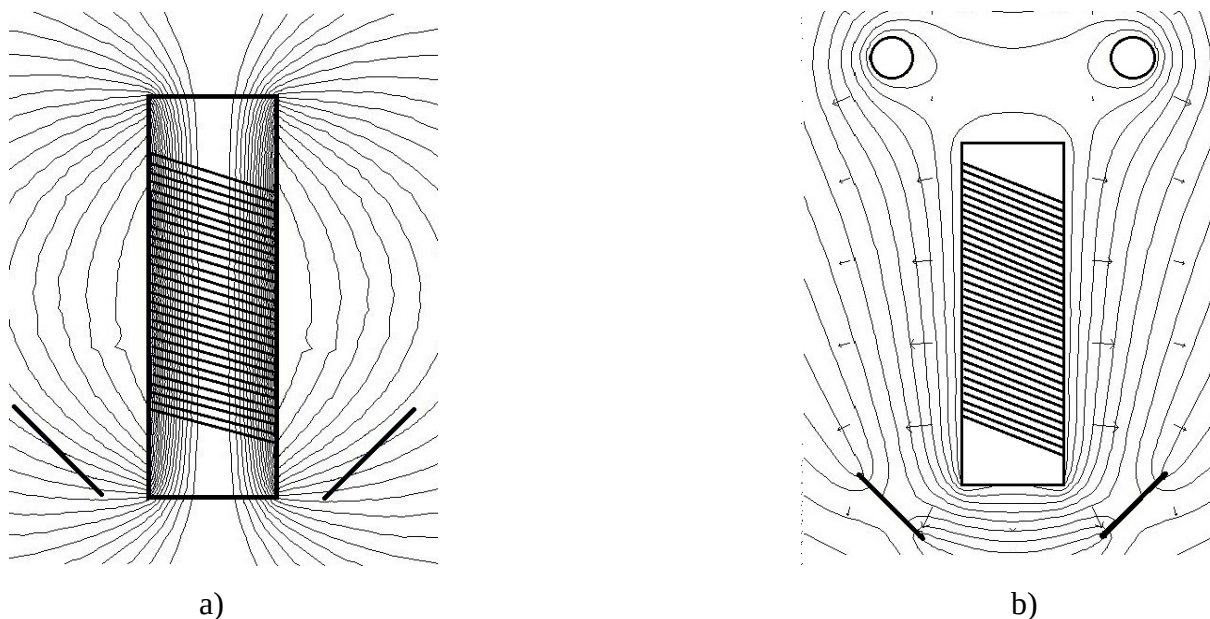
$$L_{\sigma 1} = L_1 - L_{gl1} \quad (19)$$

$$L_{\sigma 2} = L_2 - L_{gl2} \quad (20)$$

Dozemno kapacitivnost VN navitja s toroidom C_2 , smo izračunali s pomočjo elektrostatične energije W_{el} (21) (slika 4).

$$C_2 = \frac{2W_{el}}{U^2} \quad (U=1V) \quad (21)$$

$$C_2 = 19,5 \text{ pF}$$



Slika 4: Prikaz izračuna a) magnetnega polja in b) elektrostatičnega polja v programu FEMM 4.2

Ob zahtevi, da morata biti lastni frekvenci obeh nihajnih krogov ω_{10} in ω_{20} enaki, dobimo kombinacije ovojev N_1 in N_2 (22). Po navadi nam dimenzija žice a_2 VN tuljave določa par $N_1 - N_2$ (23).

$$\omega_{10} = \omega_{20} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \rightarrow \sqrt{N_1^2 \Lambda_1 C_1} = \sqrt{N_2^2 \Lambda_2 C_2}$$

$$N_2 = N_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1 C_1}{\Lambda_2 C_2}} \quad (22)$$

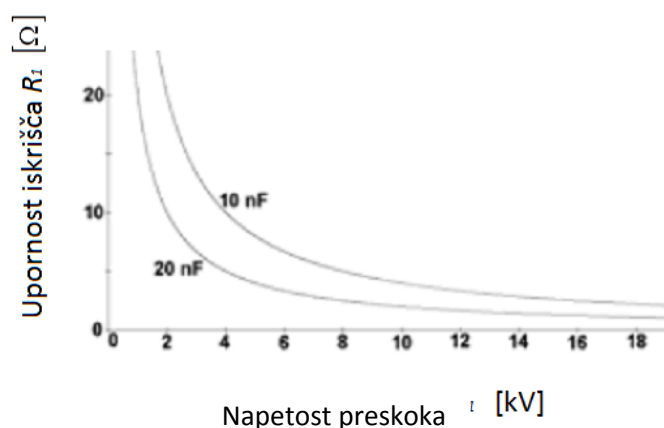
$$\frac{d_2}{b_{g2}} = \frac{d_2}{N_2 a_2} = 0,3 \rightarrow N_2 = \frac{d_2}{a_2 0,3} \quad (23)$$

3.2 Določitev ohmskih upornosti

Ohmske upornosti, ki nastopajo v enačbi (2), lahko razdelimo na dve skupini. Prva so upornosti navitij v drugo skupino pa lahko uvrstimo upornost električnega obloka (iskrišča). Izkaže se, da lahko z upornostjo električnega obloka kar dobro zajamemo ohmsko upornost NN nihajnega kroga R_1 , medtem ko je pri določitvi ohmske upornosti VN nihajnega kroga R_2 potrebno izračunati upornost VN tuljave pri resonančni frekvenci.

Glede na predvideno napetost ki povzroči preskok na iskrišču, lahko s slike 5 dobimo vrednost za R_1 [7].

$$R_1 \approx 5 \Omega$$



Slika 5: Upornost električnega obloka v odvisnosti od napetosti preskoka. Kot parameter je podana vednost primarne kapacitivnosti C_1 .

Pri izračunu ohmske upornosti VN tuljave je treba upoštevati izriv toka in bližinski učinek. To lahko približno izračunamo s pomočjo enačbe (24) [8], kjer so:

R_{2dc} - enosmerna upornost VN navitja [Ω] a_{02} - premer žice VN navitja brez izolacije [m]

ρ_{cu} - upornost žice [$0,01785 \cdot 10^{-6} \Omega m$] f_r - resonančna frekvenca [Hz]

b_{g2} - višina VN navitja [m] N_2 - število ovojev VN navitja

d_2 - premer VN navitja [m] μ_0 - permeabilnost zraka ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$)

$$R_2 = R_{2dc} \cdot \left(1 + \frac{4}{45} \xi^4 \right) \quad (24)$$

$$R_2 \approx 230 \Omega$$

$$\xi = a_{02} \sqrt{\frac{N_2 a_{02} \mu_0 f_r \pi}{b_{g2} \rho_{cu}}} \quad (25)$$

$$R_{2dc} = \rho_{cu} \frac{N_2 \pi d_2}{\frac{\pi a_{02}^2}{4}} \quad (26)$$

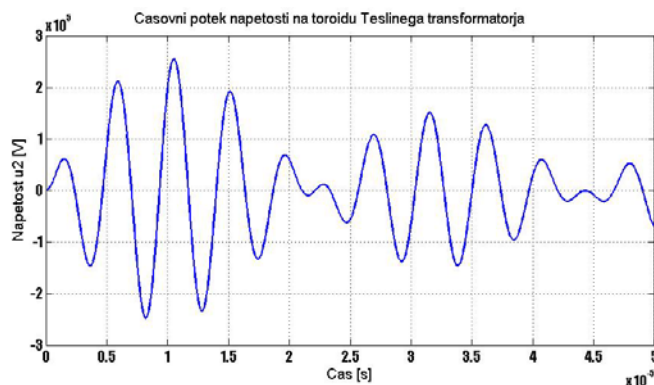
$$f_r = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi} \quad (27)$$

4. REZULTATI IZRAČUNA

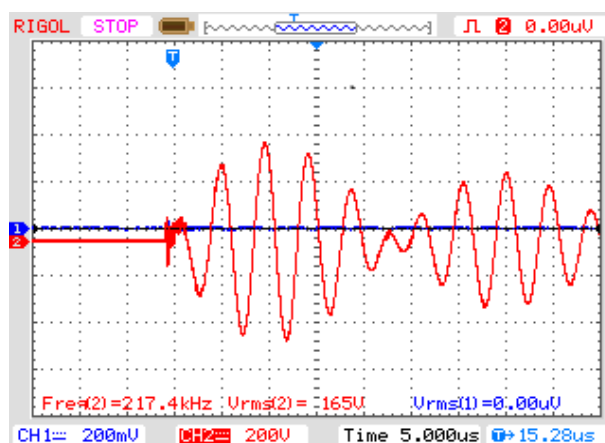
V nadaljevanju so predstavljeni rezultati izračunov, ki smo jih po prej navedenih postopkih izvedli za potrebo izdelave Teslinega transformatorja.

$a_2 = 0,45 \text{ mm}$	$\delta_1 = -23900 \text{ s}^{-1}$	$N_1 = 13$
$a_{02} = 0,4 \text{ mm}$	$\delta_2 = -23500 \text{ s}^{-1}$	$N_2 = 915$
$d_2 = 125 \text{ mm}$	$\omega_1 = 1488200 \text{ s}^{-1}$	$f_r = 214,4 \text{ kHz}$
$b_{g2} = 412 \text{ mm}$	$\omega_2 = 1204500 \text{ s}^{-1}$	
$\Lambda_1 = 3,5834 \cdot 10^{-7} \text{ H}$	$L_1 = 60,5 \cdot 10^{-6} \text{ H}$	$L_{\sigma 1} = 56,75 \cdot 10^{-6} \text{ H}$
$\Lambda_2 = 3,3162 \cdot 10^{-8} \text{ H}$	$L_2 = 27,78 \cdot 10^{-3} \text{ H}$	$L_{\sigma 2} = 9,13 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
$\Lambda_m = 2,2268 \cdot 10^{-8} \text{ H}$	$M = 264,9 \cdot 10^{-6} \text{ H}$	$L_{gl1} = 3,76 \cdot 10^{-6} \text{ H}$
$k = 0,204$	$q = 0,0142$	$L_{gl2} = 18,64 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
$L_{2x} = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ H}$	$C_1 = 9,9 \cdot 10^{-9} \text{ F}$	$R_1 = 5 \Omega$
$L_{\sigma 2x} = 1,853 \cdot 10^{-6} \text{ H}$	$C_2 = 19,5 \cdot 10^{-12} \text{ F}$	$R_2 = 230 \Omega$
$L_{gl} = 3,76 \cdot 10^{-6} \text{ H}$	$C_{2x} = 96,7 \cdot 10^{-9} \text{ F}$	$R_{2x} = 0,0464 \Omega$

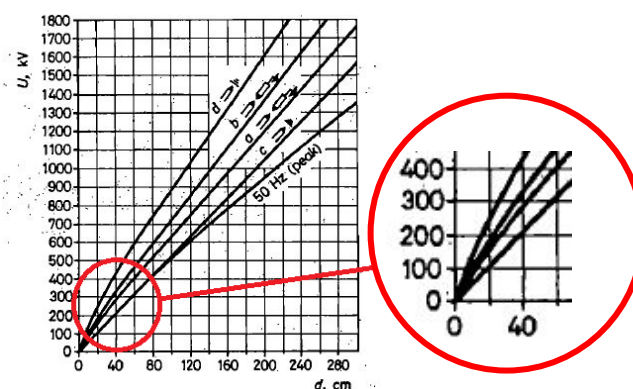
Časovni potek izračunane napetosti u_2 na toroidu Teslinega transformatorja prikazuje slika 6. Slika 7 prikazuje val, ki smo ga posneli z osciloskopom na oddaljenosti 2,5 metra od Teslinega transformatorja. Iz primerjave slik 6 in 7 je razvidno, da se potek izračunane vrednosti napetosti dobro ujema z merjeno vrednostjo. Amplitudne vrednosti nismo izmerili, lahko pa smo jo ocenili glede na dolžino leaderjev, ki nastanejo če ozemljeno konico približamo toroidu TT slika 8 [8]. Dolžina teh leaderjev je bila $\sim 300 \text{ mm}$, kar po sliki 8 ustreza vrednostim med $200 \sim 300 \text{ kV}$. Izračunana maksimalna vrednost na sliki 6 je $u_{2\max} \approx 250 \text{ kV}$.



Slika 6: Izračunan vrednost napetosti u_2 na toroidu Teslinega transformatorja.



Slika 7: Izmerjena vrednost oddanega vala Teslinega transformatorja na oddaljenosti 2,5 m.



Slika 8: Graf, ki prikazuje prebojno napetost v odvisnosti od dolžine leaderja.

5. SKLEP

Prikazan je pristop k izračunu Teslinega transformatorja. Računski postopki za izračun lastnih frekvenc, induktivnosti, kapacitivnosti, upornosti in samega odziva, so se izkazali zadosti natančni in predstavljajo osnovo pri izdelavi TT. Aktualne teme na področju elektroenergetike in visokih napetosti znova odpirajo možnost za njegovo uporabo, zato so nadaljnje raziskave lahko zelo koristne in dajo odgovor, v kakšni meri je možno uporabiti Tesline ideje pri iskanju novih pristopov na omenjenih področjih.

6. VIRI, LITERATURA

- [1] P. Jereb: Udarni prenaponi u slojnim visokonaponskim namotima transformatora, Stručno savjetovanje elektroenergetičara Jugoslavije, Ohrid, 1972.
- [2] Daniel J. Inman, Engineering vibration, 3rd edition, Pearson Prentice Hall, 2009.
- [3] K. Lenasi, Navodilo za izračun transformatorjev, Etra 33, Ljubljana, 2004.
- [4] M. Tilbury, The ultimate Tesla coil design and construction guide, McGraw Hill, 2008

- [5] D. C. Meeker, Finite Element Method Magnetics, Version 4.2, <http://www.femm.info>, 2010
- [6] M. Trbušić, M. Čepin, Razporeditev udarne napetosti vzdolž zvrnjenega navitja transformatorja, Elektrotehniški vestnik 78(3), Ljubljana, 2011.
- [7] Mark S. Rzeszotarski, Gap / primary losses and surge impedance, Cleveland, Ohio, U.S.A., 2005.
- [8] K. Karsai, D. Kerényi, L. Kiss, Large Power Transformers, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987.

NASLOV AVTORJEV

Mislav Trbušić, univ. dipl. inž. el.

red. prof. dr. Jože Pihler, univ. dipl. inž. el.

Univerza v Mariboru, Fakulteta, za elektrotehniko, računalništvo in informatiko
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija

Tel: + 386 2 220 70 61

Fax: + 386 2 252 54 81, + 386 2 220 72 72

Elektronska pošta: joze.pihler@um.si